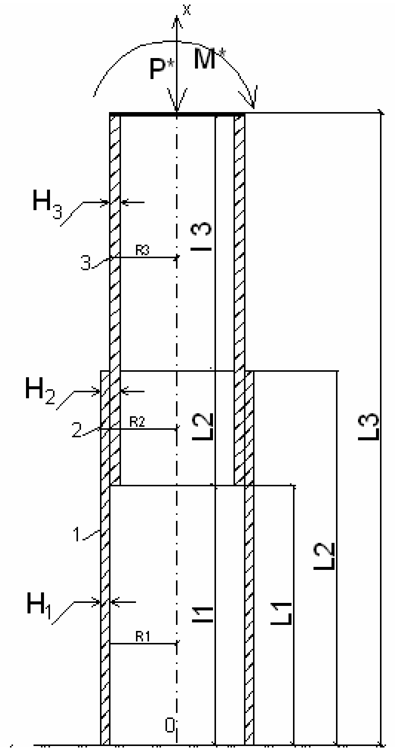
Л.С.Сабитов, И.Л.Кузнецов, А.З.Камалов

Напряжённо–деформированное состояние соединения труб разного диаметра

В строительстве широко используются конструкции из труб, которые необходимо соединять друг с другом. При этом наиболее часто требуется соединение труб разного диаметра.

В данной работе исследуется равновесие системы двух вертикальных цилиндрических труб, насаженных друг в друга (рисунок) так, что в цилиндрическую трубу 1 толщиной H_1, радиусом R_1 и длиной L_2 запрессована другая труба 3 толщиной H_3, радиусом $R_3 = R_1 - (H_1 + H_3)/2$ и длиной (L_3 - L_1). Предполагается, что слои в области $L_1 \le x \le L_2$ работают совместно без скольжения. Считаем, что упругие константы труб $E_1 = E_3 = E$ (модули упругости), $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ (коэффициенты Пуассона) заданы.

Пусть у рассматриваемой вертикальной конструкции один край (x = 0) заделан, другой край (x = L_3) закрыт очень жесткой диафрагмой, к которой приложены вертикальная сжимающая сила P^* и изгибающий момент M^*, а сама конструкция находится под действием собственного веса.



Соединение труб разного диаметра

Решение поставленной задачи можно осуществить, используя следующие рассуждения. Составная конструкция состоит в областях $0 \le x \le L_1$ из однослойной, $L_1 \le x \le L_2$ - двухслойной, $L_2 \le x \le L_3$ - однослойной оболочек. За поверхности приведения 1-ой и 3-ей оболочек принимаются их срединные поверхности, а для двухслойной оболочки 2 принимается срединная поверхность 1-ой оболочки, эквидистентная к поверхности контакта оболочек 1 и 3. Для всех трёх оболочек 1, 2 и 3 в целом примем гипотезу недеформируемых нормалей. В силу этого условия контакта для 2-ой оболочки в области $L_1 \le x \le L_2$ будут выполняться автоматически [1].

Тогда для компонентов деформации j-го слоя i-ой $(i = 1,2,3)$ оболочки получим

$$\varepsilon_1^{(j)} = \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x}, \; \partial l_1 = -\frac{\partial^2 w^{(j)}}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_2^{(j)} = \frac{\partial v^{(j)}}{R\partial\theta} + \frac{1}{R} w^{(j)}, \ \partial l_2 = -\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial\theta^2} - \frac{w}{R^2}, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{12}^{(j)} = \frac{\partial u^{(j)}}{R\partial\theta} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x}, \partial l_{12} = -\frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial x} + \frac{2}{R}\frac{\partial v^{(j)}}{\partial x}.$$

Для тангенциальных перемещений j-го слоя будут справедливы соотношения

$$u^{(j)} = u - z\frac{\partial N}{\partial x},$$

$$v^{(j)} = \left(1 + \frac{z}{R}\right)v - \frac{z}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta}, \tag{2}$$

где z – координата по нормали к цилиндрической оболочке; $w^{(j)} = w(x,\theta), u(x,\theta), v = v(x,\theta)$ - нормальные и тангенциальные перемещения соответствующей точки координатной поверхности цилиндрической трубы.

Напряжения в слоях цилиндрических труб

$$\sigma_x^{(j)} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) + z(\partial l_1 + \nu\partial l_2)\right],$$

$$\sigma_\theta^{(j)} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) + z(\partial l_2 + \nu\partial l_1)\right], \tag{3}$$

$$\tau_{x\theta} = G(\omega + z\tau).$$

Уравнения равновесия i-ой трубы

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial S}{\partial\theta} = p, \ \frac{1}{R}\frac{\partial T_2}{\partial\theta} + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{Q_2}{R} = 0,$$

$$-\frac{T_2}{R} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{R\partial\theta} = 0, \ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial\theta} = Q_1, \tag{4}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial M_2}{\partial\theta} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_2.$$

Соотношения упругости [1]:

$$T_1 = C(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) + k(\partial l_1 + \nu\partial l_2),$$

$$T_2 = C(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) + k(\partial l_2 + \nu\partial l_1),$$

$$S = C_6\omega + k_6\partial l_{12}, \tag{5}$$

$$M_1 = D(\partial l_1 + \nu\partial l_2) + k(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2),$$

$$M_2 = D(\partial l_2 + \nu\partial l_1) + k(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1),$$

$$H = D_6\tau + k_6\omega.$$

В формулах (1)-(5) индекс i, указывающий номер трубы, для кратности опущен. В формулах (4) и (5) T_1, T_2, S – внутренние тангенциальные силы, M_1, M_2, H – изгибающие и крутящий моменты, отнесённые к единице длины дуг соответствующих координатных линий $(x, \beta = R\theta)$. В (5) введены следующие обозначения:

$$C = \frac{(H_1 + H_3)E}{1-\nu^2}; \ C_6 = (H_1 + H_3)\frac{E}{2(1+\nu)}; D = \frac{2EH^3}{3(1-\nu^2)}; \ D_6 = \frac{2}{3}H^3\frac{E}{1+\nu};$$

$$k = \frac{(H_1 + H_3)H_3E}{2(1-\nu^2)}; \ k_6 = -H_3\left(\frac{H_1}{2} + \frac{H_3}{2}\right)\frac{E}{2(1-\nu)}; \ H^3 = 3\sqrt[3]{\frac{H_1 + H_3}{2}\left[\left(\frac{H_1}{2} + H_3\right)^2 - \frac{H_1H_3}{2}\right]}. \tag{6}$$

Соотношения упругости (5) справедливы для двухслойной оболочки в области $L_1 \le x \le L_2$. Чтобы получить эти соотношения для труб 1 и 3, достаточно положить в (6) $H_3 = 0, H_1 = H_1, H_1 = H_3$ соответственно.

Для исследования напряженно–деформированного состояния данной конструкции предлагается приближенный аналитический метод решения. Во-первых, все силы действующие на сооружения, таковы, что будут вызывать либо только осесиммитричный изгиб (осевая сжимающая сила P* и собственный вес), либо обратносимметричный изгиб (изгибающий момент M*). Во – вторых общие решения для этих случаев будем строить как сумму безмоментного и моментного (типа краевого эффекта) решений [1,2]. В нашей задаче условия существования безмоментного напряжённого состояния выполняются, поскольку нагрузки, действующие на сооружения, главные.

Расчёт по безмоментной теории. Учитывая выполнение вышеуказанных условий и предполагая, что на оболочку вращения действует симметричная осевая нагрузка, приведём расчётные формулы по безмоментной теории перемещения:

$$u_i^* = [u_{i1} + u_{i2}\bar{x} + u_{i3}\bar{x}^2 + (u_{i4} + u_{i5}\bar{x})\cos\theta]H_1;$$
$$v_i^* = (v_{i1} + v_{i2}\bar{x} + v_{i3}\bar{x})\cos\theta * H_1; \quad (7)$$
$$w_i^* = [w_{i1} + w_{i2}\bar{x} + (w_{i3} + w_{i4}\bar{x} + w_{i5}\bar{x}^2)\cos\theta]H_1.$$

Мембранные усилия:

$$T_{1*}^{(i)} = (T_{i1} + T_{i2}\bar{x} + T_{i3}\cos\theta)EH_1. \quad (8)$$

Напряжения:

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{T_{1*}^{(i)}}{H_i},\ \tau_{x\theta}^{(i)} = \gamma_i(\tau_{i1} + \tau_{i2}\bar{x})\sin\theta / H_1, \quad (9)$$

$i = 1,2,3$ (для области $0 \le x \le L_1, L_1 \le x \le L_2, L_2 \le x \le L_3$).

Полученные решения удовлетворяют уравнениям равновесия (4) безмоментной теории, условиям упругой стыковки областей $i=1$, $i=2$, $i=3$, а также граничным условиям при $x=0$ $(u^* = 0, \varepsilon_2^* = 0)$ и $x = L_3$ $(T_{1,*}^{(3)} = \frac{P^*}{2\pi R_3}$ и $T_{1,*}^3 = \frac{M^*}{\pi R_3}\cos\theta)$.

Под действием силы $T_{1*}^{(i)}$ при $x=0$, вопреки нашему допущению о защемлении этого конца трубы, произойдёт некоторая линейная деформация по окружности. Это говорит о том, что при $x=0$ будет некоторый местный изгиб, неучтённый в безмоментной теории. Полное решение задачи можно получить только при совместном учёте как напряжений по безмоментной теории так и напряжений изгиба. Это будет выполнено в дальнейшем при рассмотрении местного изгиба, т.е. краевого эффекта.

В выражениях (7) и (8) введены следующие безразмерные параметры:

$$\bar{x} = \frac{x}{L_3}, \gamma_i = \frac{\bar{h}_1}{(2(1+v)R_i)};$$

$$u_{11} = 0;\ u_{12} = \frac{l_3 T_1^*}{h_1};\ u_{13} = \frac{l_3 P_1}{2h_1};\ u_{14} = 0;\ u_{15} = -\frac{Ml_3 h_1}{\left(\pi \bar{R}_3^2\right)};$$

$$u_{21} = U_0^{(2)};\ u_{22} = \frac{l_3 T_2^*}{h_2};\ u_{23} = \frac{l_3 P_2}{2h_2};\ u_{24} = \frac{W_0^{(2)}\bar{R}_2}{h_1};\ u_{25} = -\frac{u_{15}}{R_2 h_2};$$

$$u_{31} = U_0^{(3)};\ u_{32} = \frac{l_3 T_3^*}{h_3};\ u_{33} = \frac{l_3 P_3}{2h_3};\ u_{34} = \frac{W_0^{(3)}\bar{R}_3}{h_1};\ u_{35} = -\frac{u_{15}}{h_3};$$

$$v_{11} = -V_0^{(1)} + \frac{vh_1 M}{\left(\pi \bar{R}_3^2\right)};\ v_{12} = 0;\ v_{13} = -\frac{l_3^2 h_1 M}{\left(2\pi R_3^2\right)};$$

$$v_{21} = -V_0^{(2)} + \frac{vh_1^2 M}{\left(\pi \bar{R}_2\right)};\ v_{22} = \frac{l_3 W_0^{(2)}}{h_1};\ v_{23} = -\frac{l_3^2 h_1^2 M}{\left(2\pi R_3^2 h_2\right)};$$

$$v_{31} = -V_0^{(3)} + \frac{vh_1^2 M}{\left(\pi \bar{R}_3 h_3\right)};\ v_{32} = \frac{l_3 W_0^{(3)}}{h_1};\ v_{33} = -\frac{l_3^2 h_1^2 M}{\left(2\pi\ R_3^2 h_3\right)};$$

$$\gamma_i = \frac{h_1}{\left[2(1+v)\bar{R}_i\right]};\ \tau_{i1} = -u_{i4} + \frac{\bar{R}_i v_{i2}}{l_3};\ \tau_{i2} = -u_{i5} + 2\frac{\bar{R}_i v_{i3}}{l_3};\ \tau_{i3} = \frac{2h_1\beta_i}{l_3}\ (i = 1,2,3);$$

$$T_3^* = -\overline{P}_3 - \overline{P}^*,\ T_2^* = (\overline{P}_3 - \overline{P}_2)\overline{L}_2 + T_3^*;\ \overline{T}_1^* = (\overline{P}_2 - \overline{P}_1)\overline{L}_1 + T_2^*;$$

$$V_0^{(1)} = \frac{\nu \overline{h}_1 \overline{M}}{\left(\pi \overline{R}_3^2\right)},\ V_0^{(2)} = V_0^{(1)} - f_1\left(1 - \frac{\overline{h}_1}{\overline{h}_2}\right)\overline{M} - \left(1 - \frac{\overline{h}_1}{\overline{h}_2}\right)V_0^{(1)};$$

$$V_0^{(3)} = V_0^{(2)} - \frac{\overline{L}_2 l_3}{\overline{h}_1}(W_0^{(2)} - W_0^{(3)}) + f_2(1 - f_3)\overline{M} - f_5(1 - f_4)V_0^{(1)};$$

$$W_0^{(1)} = 0,\ W_0^{(2)} = f_6\left(1 - \frac{\overline{h}_1}{\overline{h}_2}\right)\overline{M};\ W_0^{(3)} = \frac{1}{R_3}\left[W_0^{(2)} - f_7\left(1 - \frac{\overline{h}_1}{\overline{h}_2}\right)\overline{M}\right];$$

$$f_4 = \frac{\overline{R}_2 h_2}{\overline{R}_3 \overline{h}_3};\ f_6 = \frac{1}{\pi}\frac{\overline{L}_2 h_1^2}{\overline{R}_3^2};\ f_7 = \frac{1}{\pi}\frac{\overline{h}_1^3 L_2 l_3}{R_3^2 h_2}.$$

$$w_{11} = \frac{\nu \overline{T}_1^*}{h_1},\ w_{12} = \frac{\nu \overline{P}_1^*}{h_1},\ w_{13} = \overline{V}_0^{(1)},\ w_{14} = 0,\ w_{15} = \frac{1}{2\pi}\frac{h_1 l_3^2}{\overline{R}_3^2}\overline{M};$$

$$w_{21} = \frac{\nu \overline{T}_2^*}{h_2},\ w_{22} = \frac{\nu \overline{P}_2^*}{h_2},\ w_{13} = \overline{V}_0^{(2)},\ w_{24} = -\frac{l_3}{h_1}W_0^{(2)},\ w_{25} = \frac{1}{2\pi}\frac{h_1^2 l_3^2}{\overline{R}_2^3 h_2}\overline{M};$$

$$w_{31} = \frac{\nu \overline{T}_3^*}{h_3},\ w_{32} = \frac{\nu \overline{P}_3^*}{h_3},\ w_{33} = \overline{V}_0^{(3)},\ w_{34} = -\frac{l_3}{h_1}W_0^{(3)},\ w_{35} = \frac{1}{2\pi}\frac{h_1^2 l_3^2}{\overline{R}_3^3 h_3}\overline{M};$$

$$T_{11} = T_1^*;\ T_{12} = \overline{P}_1;\ T_{13} = -\frac{1}{\pi}\frac{h_1^2}{\overline{R}_3^2}\overline{M};$$

$$T_{21} = T_2^*;\ T_{22} = \overline{P}_2;\ T_{23} = -\frac{1}{\pi}\frac{h_1^2}{\overline{R}_2^2}\overline{M};$$

$$T_{31} = T_3^*;\ T_{32} = \overline{P}_3;\ T_{33} = -\frac{1}{\pi}\frac{h_1^2}{\overline{R}_3^2}\overline{M}.$$

Здесь и далее введены следующие безразмерные величины:

$$h = \frac{H_1}{H_3},\ \overline{h}_i = \frac{H_i}{R_1},\ \overline{R}_i = \frac{R_i}{R_1},\ \overline{M} = \frac{M^*}{EH_1^3},\ \overline{P}_i = \frac{p_i L_3}{EH_1},$$

$$\overline{L}_i = \frac{L_i}{L_3},\ \overline{l}_3 = \frac{L_3}{R_1},\ \overline{x} = \frac{x}{L_3},\ \overline{T}_i^* = \frac{T_i^*}{EH_1}\left(i = 1,2,3\right), \tag{10}$$

$$\overline{\beta}_1 = \beta_1 L_3 = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}l_3}{\sqrt{h_1}};\ \overline{\beta}_2 = \sqrt{\frac{h}{(1+h)}} * \overline{\beta}_1,\ \overline{\beta}_3 = \sqrt{\frac{\overline{h}}{1 - \frac{1}{2}(h_1 + h_3)}} * \overline{\beta}_1.$$

При этом $H_2 = H_1 + H_3$; $R_2 = R_1$ и $R_3 = R_1 - \frac{1}{2}(H_1 + H_3)$.

Безмоментная теория даёт вполне удовлетворительные результаты поведения труб при достаточном удалении от линии искажения, т.е. $x = 0, x = L_1, x = L_2$ вдоль которых имеются скачки в толщине рассматриваемой конструкции.

Асимптотическое интегрирование разрешающих уравнений. Рассмотрим краевые эффекты сооружения в окрестностях $x = 0, x = L_1, x = L_2$.

Запишем уравнение краевого эффекта для i-ой оболочки [2]:

$$\frac{d^4 w_i}{dx^4} + 4\beta_i^4 w_i = 0, \tag{11}$$

где $\beta_i^4 = \frac{EH_i}{4R_i^2 D_i}$; D_i - жесткость i-ой трубы при изгибе. При этом в областях $0 \le x \le L_1$, $L_2 \le x \le L_3$ $(i = 1, i = 3)$ $\beta_1^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R_1^2 H_1^2}$; $\beta_3 = \frac{3(1-\nu^2)}{R_3^2 H_3^2}$, а в области $L_1 \le x \le L_2 (i = 2)$

$$\beta_2^4 = \frac{EH_2}{4R_2^2 D_2} = \frac{3H_2(1-\nu^2)}{R_2^2(H_1+H_3)\left[(H_1+2H_3)^2 - 2H_1H_3\right]}; \qquad (12)$$

$$\beta_2^4 = \frac{3H_2(1-\nu^2)}{R_2^2(H_1+H_3)(H_1^2+2H_1H_3+4H_3^2)},$$

или $\bar\beta_1 = \beta_1 L_3 = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{\bar h_1}} l_3$; $\bar\beta_2 = \bar\beta_1 h \sqrt[4]{\frac{h_2}{hh_1(1+h)(4+2h+h^2)}}$; $\bar\beta_3 = \beta_1 \sqrt{\frac{h_2}{2-h_1-h_3}}$.

Общее решение уравнения (11) запишем в следующем виде:

$$W_{кр}^{(i)} = A_1^{(i)}\psi_1^{(i)}(x) + B_1^{(i)}\psi_2^{(i)}(x) + A_2^{(i)}\psi_3^{(i)}(x) + B_2^{(i)}\psi_4^{(i)}(x) \quad (i = 1,2,3), \qquad (13)$$

где $A_1^{(i)}, B_1^{(i)}, A_2^{(i)}, B_2^{(i)}$ - постоянные интегрирования, которые нужно определять из условия на конце $(x = 0)$ сооружения и из условия упругой стыковки при $x = L_1$ и $x = L_2$.

В (13) введены следующие функции:

$$\psi_1^{(i)}(x) = \cos\bar\beta_i(\bar x - \bar L_{i-1})\exp\left(-\bar\beta_i\left(\bar x - \bar L_{i-1}\right)\right);$$
$$\psi_2^{(i)}(x) = \sin\bar\beta_i(\bar x - \bar L_{i-1})\exp\left(-\bar\beta_i\left(\bar x - \bar L_{i-1}\right)\right);$$
$$\psi_3^{(i)}(x) = \cos\bar\beta_i(\bar L_i - \bar x)\exp\left(-\beta_i\left(\bar L_i - \bar x\right)\right); \qquad (14)$$
$$\psi_4^{(i)}(x) = \sin\bar\beta_i(\bar L_i - \bar x)\exp\left(-\beta_i\left(\bar L_i - \bar x\right)\right).$$

Десять постоянных интегрирования можно теперь определить из условий заделки $(x = 0)$ и упругой стыковки $x = L_1$ и $x = L_2$. Эти условия записываем следующим образом:

при $x = 0$

$$W_{кр}^{(i)} + W_{13} + W_{14} = 0;$$
$$\frac{\partial W_{кр}^{(i)}}{\partial x} + W_{14} = 0; \qquad (15)$$

при $x = L_1$

$$W_{кр}^{(1)} + W_{13} + W_{14}L_1 + W_{15}L_1^2 = W_{кр}^{(2)} + W_{23} + W_{24}L_1 + W_{25}L_1^2;$$
$$\frac{\partial W_{кр}^{(1)}}{\partial x} + W_{14} + 2W_{15}L_1 = \frac{\partial W_{кр}^{(2)}}{\partial x} + W_{24} + 2W_{25}L_1^2;$$
$$D_1\left(\frac{\partial^2 W_{кр}^{(1)}}{\partial x^2} + 2W_{15}\right) = D_2\left(\frac{\partial^2 W_{кр}^{(2)}}{\partial x^2} + 2W_{25}\right); \qquad (16)$$
$$D_1\left(\frac{\partial^3 W_{кр}^{(1)}}{\partial x^3}\right) = D_2\left(\frac{\partial^2 W_{кр}^{(2)}}{\partial x^3}\right);$$

при $x = L_2$

$$W_{кр}^{(2)} + W_{23} + W_{24}L_2 + W_{25}L_2^2 = W_{кр}^{(3)} + W_{33} + W_{34}L_2 + W_{35}L_2^2;$$
$$\frac{\partial W_{кр}^{(2)}}{\partial x} + W_{24} + 2W_{25}L_2 = \frac{\partial W_{кр}^{(3)}}{\partial x} + W_{34} + 2W_{35}L;$$

$$D_2\left(\frac{\partial^2 W^{(2)}_{кр}}{\partial x^2}+2W_{25}\right)=D_3\left(\frac{\partial^2 W^{(3)}_{кр}}{\partial x^2}+2W_{35}\right);\qquad(17)$$

$$D_2\left(\frac{\partial^3 W^{(2)}_{кр}}{\partial x^3}\right)=D_3\left(\frac{\partial^3 W^{(2)}_{кр}}{\partial x^3}\right).$$

Если в (15) – (17) подставить $W_{i,j}, W^{(i)}_{кр}$ и её производные, то эти граничные условия дадут следующие значения постоянных интегрирования:

$$A^{(1)}_1=-V^{(1)}_0;\qquad B^{(1)}_1=\frac{\nu_1\bar{P}_1}{\beta_1\bar{h}_1}-\bar{V}^{(1)}_0;\ (\text{вблизи } x=0)$$

$$A^{(1)}_2=\frac{\Delta_1}{\Delta};\qquad B^{(1)}_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};\quad (\text{вблизи } x=L_1)$$

$$A^{(2)}_1=\frac{\Delta_3}{\Delta};\qquad B^{(2)}_1=\frac{\Delta_4}{\Delta};$$

$$A^{(2)}_2=\frac{\Delta^*_1}{\Delta^*};\qquad B^{(2)}_2=\frac{\Delta^*_2}{\Delta^*};\quad (\text{вблизи } x=L_2)$$

$$A^{(3)}_1=\frac{\Delta^*_3}{\Delta^*};\qquad B^{(3)}_1=\frac{\Delta^*_4}{\Delta^*},\qquad(18)$$

где $\Delta=(1+\beta_{12})(g+g_{12})+(1+g)(g_{12}+\beta_{12})$;

$$\Delta_1=-\left[b_1(\beta_{12}+g)+b_2\right](g+g_{12})+(b_1g+b_3)(g-\beta_{12});$$

$$\Delta_2=g(1+\beta_{12})(b_1\beta_{12}-b_3)-(1+g)\left[g_{12}(b_2+b_1\beta_{12})+b_3\beta_{12}\right];\qquad(19)$$

$$\Delta_3=g(-b_1+b_2-b_3)-\beta_{12}(b_1-b_3)+g_{12}(-2b_1+b_2);$$

$$\Delta_4=b_1(g-\beta_{12})-b_2(1+g)+b_3(2+g+\beta_{12}).$$

Выражения для Δ^*, $\Delta^*_j\ (j=1,2,3,4)$ получим из (19) заменой $g\to g^*, b_j\to b^*_j, g_{12}\to g_{23}, \beta_{12}\to\beta_{32}$.

При этом $\beta_{12}=\dfrac{\bar{\beta}_2}{\bar{\beta}_1}, g_{12}=\beta^2_{12}\left(\dfrac{D_2}{D_1}\right), g=\beta_{12}g_{12}$,

$$\beta_{32}=\frac{\bar{\beta}_3}{\bar{\beta}_2}, g_{23}=\beta^2_{32}\left(\frac{D_3}{D_2}\right), g^*=\beta_{32}g_{23}.\qquad(20)$$

Коэффициенты b_i и $b^*_i, (i=1,2,3)$ определяются из следующих выражений:

$$b_1=(W_{23}-W_{13})+(W_{24}-W_{14})L_1+(W_{25}-W_{15})\bar{L}^2_1;$$

$$b_2=\frac{1}{\beta_1}\left[(W_{24}-W_{14})+2(W_{25}-W_{15})\bar{L}_1\right];\qquad(21)$$

$$b_3=\frac{1}{\bar{\beta}^2_1}\left(\frac{D_2}{D_1}W_{25}-W_{15}\right)-\frac{6(1-\nu^2)}{\bar{\beta}_1}\frac{\bar{l}^2_3}{\bar{h}^2_1}\left(4+\frac{\bar{h}_3}{h_1}\right)T_{13};$$

$$b^*_1=(W_{33}-W_{23})+(W_{34}-W_{24})\bar{L}_2+(W_{35}-W_{25})\bar{L}^2_2;$$

$$b^*_2=\frac{1}{\bar{\beta}_2}\left[(W_{34}-W_{24})+2(W_{35}-W_{25})\bar{L}_2\right];\qquad(22)$$

$$b^*_3=\frac{1}{\bar{\beta}^2_2}\left(\frac{D_3}{D_2}W_{35}-W_{25}\right).$$

Введём следующие выражения для безразмерного прогиба $W_{кр}^{(i)}$ и его последовательных производных в форме:

$$\varphi_0^{(i)}(\bar{x}) = \bar{w}_{kp}^{(i)} = A_1^{(i)}\psi_1^{(i)}(\bar{x}) + B_1^{(i)}\psi_2^{(i)}(\bar{x}) + A_2^{(i)}\psi_3^{(i)}(\bar{x}) + B_2^{(i)}\psi_4^{(i)}(\bar{x});$$

$$\varphi_1^{(i)}(x) = \frac{\partial \bar{w}_{kp}^{(i)}}{\partial \bar{x}} = \left(-A_1^{(i)} + B_1^{(i)}\right)\psi_1^{(i)} - \left(A_1^{(i)} + B_1^{(i)}\right)\psi_2^{(i)} + \left(A_2^{(i)} - B_2^{(i)}\right)\psi_3^{(i)} + \left(A_2^{(i)} + B_2^{(i)}\right)\psi_4^{(i)};$$

$$\varphi_2^{(i)}(x) = \frac{\partial^2 \bar{w}_{kp}^{(i)}}{\partial \bar{x}^2} = -B_1^{(i)}\psi_1^{(i)} + A_1^{(i)}\psi_2^{(i)} - B_2^{(i)}\psi_3^{(i)} + A_2^{(i)}\psi_4^{(i)}; \quad (23)$$

$$\varphi_3^{(i)}(x) = \frac{\partial^3 \bar{w}_{kp}^{(i)}}{\partial \bar{x}^3} = \left(A_1^{(i)} + B_1^{(i)}\right)\psi_1^{(i)} - \left(A_1^{(i)} - B_1^{(i)}\right)\psi_2^{(i)} - \left(A_2^{(i)} + B_2^{(i)}\right)\psi_3^{(i)} + \left(A_2^{(i)} - B_2^{(i)}\right)\psi_4^{(i)}.$$

Подставив значения (18) с учётом (19)-(22) в (23), мы можем определить прогиб $W^{(i)}$, момент $M_x^{(i)}$, перерезывающую силу $Q_x^{(i)}$, а изгибающий момент $M_\theta^{(i)}$ найдём из уравнения $M_\theta^{(i)} = \nu M_x^{(i)}$ и значения силы $T_{2,кр}^{(i)}$ по формуле $T_{2,кр}^{(i)} = \frac{EH_i}{R_i} W_{кр}^{(i)}$.

Таким образом, все необходимые параметры для вычисления напряжений нашего сооружения по моментной теории становятся известными, т.е. прогиб

$$W_{кр}^{(i)} = H_1 \varphi^{(i)}(\bar{x})\cos\theta,$$

касательное усилие $T_{2,кр}^{(i)} = E(h_i W_{кр}^{(i)}(x)\cos\theta) = EH(\bar{h}_i \bar{W}_{кр}(\bar{x})\cos\theta)$,

изгибающие моменты $M_{1,кр}^{(i)} = (M_{1i}\varphi_2^{(i)}(x)EH_1^2\cos\theta)EH_1^2$; $M_{2,кр}^{(i)} = \left(\nu M_{2i} M_{1,кр}^{(i)}\right)EH_1^2$, (24)

перерезывающая сила $Q_{1,кр}^{(i)} = \left(Q_{1i}\varphi_3^{(i)}(\bar{x})\right)EH_1$. (25)

В выражениях (26) – (27) введены следующие обозначения:

$$M_{11} = -\frac{\bar{h}_1^2 \bar{\beta}_1^2}{6(1-\nu^2)l_3^2}; \quad M_{12} = -\frac{\bar{h}_2^3 \bar{\beta}_2^2}{6(1-\nu^2)l_3^2 h_1^2}; \quad M_{12} = -\frac{\bar{h}_3^3 \bar{\beta}_3^2}{6(1-\nu^2)l_3^2 \bar{h}_1^2};$$

$$Q_{11} = -\frac{\bar{h}_1 \bar{\beta}_1}{l_3} M_{11}; \quad Q_{12} = -\frac{\bar{\beta}_2 \bar{h}_1^2}{l_3} M_{12}; \quad Q_{13} = -\frac{\bar{\beta}_3 \bar{h}_1^2}{l_3} M_{13}.$$

Окончательно получим следующие выражения для определения перемещений $u, v, w,$ усилий $T_1, T_2,$ изгибающих моментов $M_1, M_2,$ перерезывающего усилия Q_1 и напряжений в областях $0 \le x \le L_1$, $L_1 \le x \le L_2$, $L_2 \le x \le L_3$, т.е. для $i = 1,2,3$:

$$u_i = \left[u_{i1} + u_{i2}\bar{x} + u_{i3}\bar{x}^2 + (u_{i4} + u_{i5}\bar{x})\cos\theta\right]H_1,$$

$$v_i = (v_{i1} + v_{i2}\bar{x} + v_{i3}\bar{x}^2)H_1\sin\theta;$$

$$w_i = \left[w_{i1} + w_{i2}\bar{x} + (w_{i3} + w_{i4}\bar{x} + w_{i5}\bar{x}^2 + \varphi_0^{(i)}(\bar{x}))\cos\theta\right]H_1;$$

$$T_1^{(i)} = (T_{i1} + T_{i2}\bar{x} + T_{i3}\cos\theta)EH_1,$$

$$T_2^{(i)} = \left[\bar{h}_i \varphi_0^{(i)}(\bar{x})\cos\theta\right]EH_1,$$

$$M_1^{(i)} = \left[M_{1i}\varphi_2^{(i)}(\bar{x})\cos\theta\right]EH_1^2, \quad (26)$$

$$M_2^{(i)} = \nu M_{2i} M_1^{(i)},$$

$$Q_1^{(i)} = \left[Q_{1i}\varphi_3^{(i)}(\bar{x})\right]EH_1,$$

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{\bar{h}_1}{h_i}\left\{\left(T_{i1} + T_{i2}\bar{x} + T_{i3}\cos\theta\right) + 12\bar{z}_i \frac{h_1^2}{h_i^2} M_{1i}\varphi_2^{(i)}(\bar{x})\cos\theta\right\}E,$$

$$\sigma_\theta^{(i)} = \frac{\bar{h}_1}{h_i}\left\{\bar{h}_i\varphi_0^{(i)}(x)\cos\theta + 12\bar{z}_i \frac{h_1^2}{h_i^2} M_{1i}\varphi_2^{(i)}(x)\nu\cos\theta\right\}E,$$

$$\tau_{x\theta}^{(i)} = \gamma_i\left[\tau_{i1} + \tau_{i2}\bar{x} + z_i\tau_{i3}\varphi_1^{(i)}(x)\right]E\sin\theta.$$

Изложенный метод и расчёт данного сооружения на напряжённо – деформированное состояние по формулам (26) применимы при выполнении следующих условий:

$$\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{L_i}{R_i}\frac{L_i}{H_i}} \succ 3,$$

поскольку при исследовании краевого эффекта мы пренебрегали взаимным влиянием краёв, т.е. оболочки $(i = 1,2,3)$ с 5%- ной погрешностью считаем длинными.

Для практических расчётов напряжённо – деформированного состояния соединения труб разного диаметра согласно полученным выражениям (26) разработана программа «RASSTRUB-07» для ЭВМ. Расчеты, проведённые по указанной программе, показали хорошую сходимость с результатами, полученными по вычислительному комплексу «Лира-9» реализующему метод конечных элементов.

Библиографический список

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек / С.А.Амбарцумян. - М.: ФМ, 1961. – 384 с.
2. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко и С. Войновский–Кригер. - М.: ФМ, 1963. – 636 с.

Ю.С.Просвирин

Планирование работы агрегатов канализационной насосной станции

Стремление к наименьшему объему приемного резервуара канализационной станции (КНС), как известно, служит защитой от выпадения в осадок содержащихся в стоках загрязнений [1]. Для этого график откачки стоков необходимо максимально приблизить к графику поступления стоков на КНС. Общеизвестная методика расчета необходимого объема резервуара состоит в совмещении графиков притока и перекачки стоков (рис.1) [2].

Она основана на том, что производительность насоса, работающего в максимальный час, принимается равной максимальному часовому притоку. Тогда вместимость приемного резервуара определяется количеством переключений насосных агрегатов (три при ручном и пять при автоматическом управлении переключений в час). Такая методика расчета изначально предполагает прерывистую работу насосов, даже если на КНС установлены насосы разной производительности для работы в разные часы суток. График перекачки стоков получается многоступенчатым и оказывается слабосвязанным с гидравлическими характеристиками подбираемого насосного оборудования и напорных трубопроводов. При этом вопросы экономии электроэнергии, увеличения технического ресурса агрегатов, автоматики и электрооборудования остаются «за кадром». Нарушение штатного графика перекачки ставит персонал перед необходимостью эмпирически отыскивать приемлемую комбинацию включения агрегатов по колебанию уровня стоков в приемном резервуаре. Установленные таким образом режимы работы насосов нередко оказываются существенно равномернее аналитических.

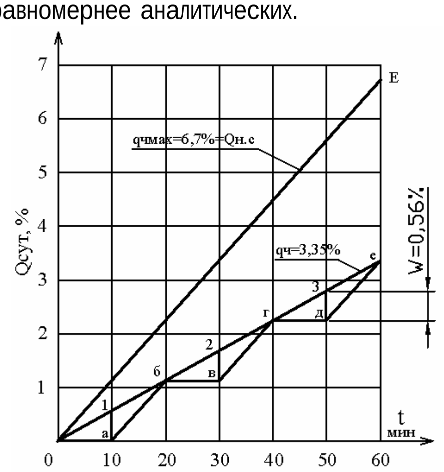


Рис.1. Интегральный график притока и откачки стоков на КНС